| **PRÉNOM** et **NOM** : | **NOMA** |
|---|---|

**Consignes**.

- Commencez par **écrire vos prénom et nom en MAJUSCULES ainsi que votre NOMA** dans l'espace prévu en haut du recto de chacune des quatre feuilles de l'examen.
- Écrivez vos réponses **à l'intérieur des cadres** prévus. Justifiez lorsque c'est demandé.
- Lorsque c'est demandé, **recopiez votre réponse finale dans le cadre séparé** prévu à la fin de la question.
- Écrivez vos réponses proprement au bic bleu ou noir, ou éventuellement au crayon noir bien lisible.
- En cas d'erreur, si vous ne pouvez vraiment pas effacer ou barrer proprement, demandez aux surveillants une nouvelle page d'énoncé. Dans ce cas, vous rendez la page erronée.

**Question 1 – Preuve par récurrence** [$\sim$**3 points**].

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à un. On souhaite démontrer par récurrence l'identité suivante

$$\sum_{i=1}^{n}\left(i\ 2^{-i}\right) = 2 - 2^{-n}(n+2). \tag{1}$$

**1a Démontrez** le cas de base.

Quand $n = 1$, l'égalité à démontrer devient

$$\sum_{i=1}^{1}\left(1\ 2^{-1}\right) \stackrel{?}{=} 2 - 2^{-1}(1+2),$$

qui se simplifie en $\frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2}$, qui est bien vérifié.

**1b Écrivez** l'égalité qu'il faut à présent prouver dans cette preuve par récurrence.

Pour prouver l'identité (1) par récurrence, on suppose qu'elle est connue pour le cas $n$ et on cherche à la démontrer pour le cas $n+1$, c'est-à-dire à prouver que

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(i\ 2^{-i}\right) = 2 - 2^{-(n+1)}(n+3).$$

**1c Démontrez** l'égalité du point précédent pour terminer la preuve par récurrence de l'identité (1).

Nous devons donc démontrer que

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(i\ 2^{-i}\right) = 2 - 2^{-(n+1)}(n+3).$$

La somme du membre de gauche comporte $n+1$ termes, et peut être décomposée comme la somme des $n$ premiers termes (qui vaut $\sum_{i=1}^{n}(i\ 2^{-i})$) auquel on additionne un dernier terme correspondant à $i = n+1$ (qui s'écrit $(n+1)2^{-(n+1)}$). Or, par l'hypothèse de récurrence, on sait que la somme de ces $n$ premiers termes vaut $2-2^{-n}(n+2)$. L'égalité à prouver peut donc aussi s'écrire

$$2 - 2^{-n}(n+2) + (n+1)2^{-(n+1)} \stackrel{?}{=} 2 - 2^{-(n+1)}(n+3).$$

Simplifions cette égalité : élimine le terme 2 des deux côtés, et on utilise le fait que $2^{-(n+1)} = 2^{-n-1} = 2^{-n}2^{-1} = \frac{1}{2}2^{-n}$, d'où la nouvelle égalité à prouver

$$-2^{-n}(n+2) + (n+1)\tfrac{1}{2}2^{-n} \stackrel{?}{=} -\tfrac{1}{2}2^{-n}(n+3).$$

On peut à présent tout diviser par $2^{-n}$, d'où

$$-(n+2) + \tfrac{1}{2}(n+1) \stackrel{?}{=} -\tfrac{1}{2}(n+3)$$

et on multipliant par 2 on trouve

$$-2(n+2) + (n+1) \stackrel{?}{=} -(n+3)$$

qui est bien correcte, puisque le membre de gauche veut $-2n-4+n+1 = -n-3$. On a démontré l'égalité.

Puisqu'on a vérifié le cas de base $n = 1$ au point **1a**, l'identité est ainsi prouvée par récurrence pour tout $n \geq 1$.

**Question 2** [$\sim$**3.5 points**].

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**2a Déterminez** tous les extrema (globaux) de la fonction $f$, et précisez pour chaque extremum s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum. **Justifiez** soigneusement vos conclusions.

Pour déterminer les extrema de la fonction $f$, on peut étudier le signe de sa dérivée $f'$.
On a

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-2/3}(2x + 1).$$

Le terme quadratique $x^2 + x + 1$ est strictement positif : on peut calculer son discriminant $1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$, ou constater que $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$. En passant cela prouve que la puissance négative $-2/3$ est bien définie (son argument étant strictement positif).
Le signe de $f'(x)$ est donc le même que celui de $2x + 1$, et donc il est strictement négatif pour $x < -\frac{1}{2}$, nul pour $x = -\frac{1}{2}$ et strictement positif pour $x > -\frac{1}{2}$.

Par conséquent on en déduit que la fonction est strictement décroissante pour $x < -\frac{1}{2}$, et strictement croissante pour $x > -\frac{1}{2}$, et on en tire aussi que $x = -\frac{1}{2}$ est un minimum global de la fonction. Il n'y a pas d'autre extrema.

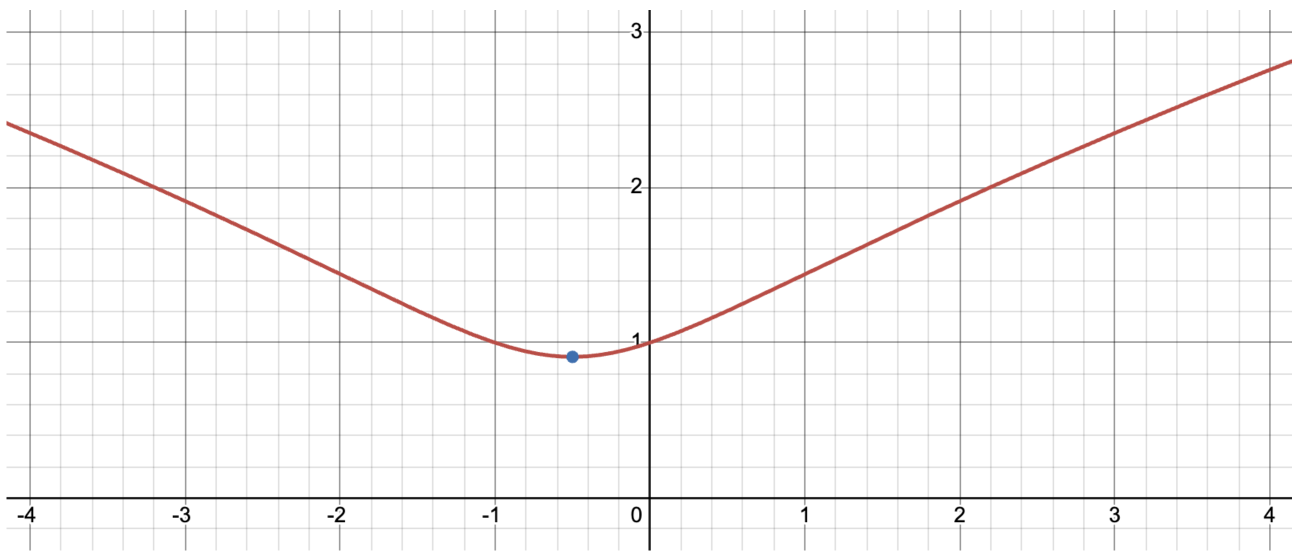
Pour la question suivante **2b**, il suffit de tracer une fonction respectant les conditions de croissance et décroissance qu'on vient d'identifier, avec le minimum en $x = -\frac{1}{2}$ (déjà tracé), tout en donnant au graphe une courbure convexe (tournée vers le haut) sur l'intervalle $[-2, 1]$, et concave (tournée vers le bas) en dehors. Pour être franc, ces courbures sont assez difficiles à distinguer sur le graphe.

**Réponse finale :** minima = $-1/2$ maxima = aucun

**2b** On vous donne l'indication suivante sur le signe de la dérivée seconde de la fonction $f$ :

$$f''(-2) = f''(1) = 0, \quad f''(x) > 0 \text{ pour } x \text{ tel que } -2 < x < 1, \quad f''(x) < 0 \text{ pour } x < -2 \text{ et pour } x > 1.$$

A l'aide de cette information et du **2a**, **tracez** le graphe de la fonction $f$ ci-dessous (un point est déjà fourni) :




**2c** On définit à présent la fonction $g$ par $g(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$ sur le domaine $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{1}{2}\}$. C'est donc la même fonction que $f$, mais dont on a réduit le domaine. **Calculez** l'expression de $h$, la fonction réciproque de $g$.
*(effectuez vos calculs au brouillon, on demande uniquement la réponse finale)*

**Réponse finale :** $h(y) = \dfrac{-1 + \sqrt{-3 + 4y^3}}{2}$

| **PRÉNOM** et **NOM** : | **NOMA** |
|---|---|

**Question 3 – Somme [∼1 point].**

Soit une liste de $n$ nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (où $n$ est un entier supérieur ou égal à 3).
**Calculez** et **simplifiez** au maximum l'expression

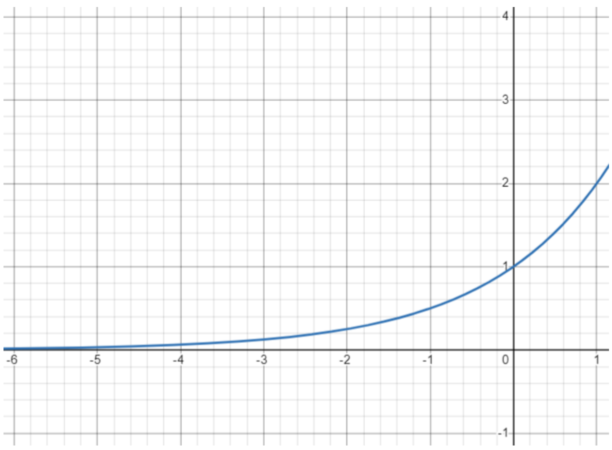
$$P = \sum_{i=2}^{n} (a_{i-1}^3 - a_{i+1}^3).$$

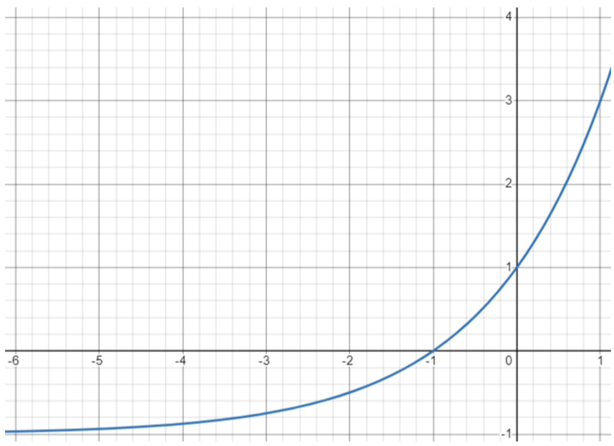
*(écrivez uniquement votre réponse finale, pas de justification demandée)*

**Réponse finale :** $P = a_1^3 + a_2^3 - a_n^3 - a_{n+1}^3$

**Question 4 – Transformation de graphe [∼1 point].**

Sur la figure de gauche ci-dessous, on a représenté le graphe de la fonction $f(x) = 2^x$, et sur la figure de droite on a représenté le graphe d'une seconde fonction $g(x) = a\,2^x + b$ où $a$ et $b$ sont deux paramètres réels.
**Déterminez** les valeurs de ces paramètres (aucune justification demandée).





$a = 2$ $\qquad$ $b = -1$

**Question 5 – Continuité [∼1.5 point].**

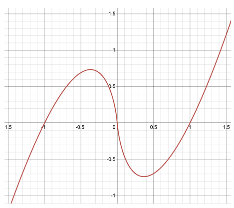
Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = \begin{cases} x\ln(x^2) & \text{pour } x \neq 0, \\ a & \text{pour } x = 0. \end{cases}$

**Déterminez** toutes les valeurs du paramètre $a$ telles que la fonction $f$ est continue en $x = 0$. **Justifiez.**

Par définition, la fonction $g$ est continue en $x = 1$ si et seulement si on a $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. On voit que $f(0) = a$, et il reste à calculer la limite

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\ln(x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2)}{1/x} \overset{LH\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x/x^2}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} -2x = 0$$

(où on a utilisé l'astuce de convertir le produit en fraction, puis la règle de L'Hospital pour lever une indétermination de type $\frac{\infty}{\infty}$). Pour que la fonction soit continue la seule possibilité est donc que $a = 0$.

A titre informatif voici le graphe de $f$ pour cette valeur de $a$ : 

**Question 6** [$\sim$**2 points**].

Soit la fonction de deux variables $f(x, y) = ye^{x^2-ay}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, où $a \neq 0$ est un paramètre.

**Donnez** tous les points critiques de $f$ en fonction de $a$. **Justifiez** votre réponse.

Les points critiques de $f$ sont les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $f_1'(x, y) = f_2'(x, y) = 0$. On calcule que

$$f_1'(x, y) = 2xye^{x^2-ay}, \qquad f_2'(x, y) = e^{x^2-ay}(1 - ay).$$

En observant l'expression de $f_2'$, on remarque que $f_2'(x, y) = 0$ implique que $1 - ay = 0$, d'où l'on déduit que $y = 1/a$. En injectant cela dans l'expression de $f_1'$, on trouve alors que $x = 0$. En conclusion, $f$ a un seul point critique en $(0, 1/a)$.

**Réponse finale :** les points critiques de $f$ sont (à donner sous la forme de couples $(x, y)$ en fonction de $a$) :

$$\{(0, 1/a)\}$$

| **PRÉNOM** et **NOM** : | **NOMA** |
|---|---|

**Question 7** [∼**3 points**].

Soit la fonction $f(x) = \ln(1 + e^x)$ (appelée parfois "softplus") définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**7a Calculez** l'expression de $p_2(x; 0, f)$, c'est-à-dire le polynôme de Taylor d'ordre 2 de $f$ en 0.

On calcule la dérivée première et la dérivée seconde de $f$ :

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, \qquad f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$

En utilisant la définition, on trouve que

$$p_2(x; 0, f) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 = \ln(2) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{1}{4}x^2 = \ln(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}.$$

**Réponse finale :** $p_2(x; 0, f) = \ln(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}$

**7b** En invoquant la formule de Taylor, et en particulier son reste, **déterminez** s'il est vrai ou faux que l'inégalité $f(x) - p_2(x; 0, f) \leq 0$ est satisfaite pour tout $x \in \mathbb{R}$. **Justifiez.** *Indice* : considerez les cas $x \geq 0$ et $x < 0$ séparément. *Aide* : Si l'expression de la dérivée troisième de $f$ vous semble trop difficile à manipuler, vous pouvez (au prix d'une légère pénalité [∼0.5 points]) utiliser l'expression $1 - e^x$ à la place de $f'''(x)$.

On calcule la dérivée troisième de $f$ :

$$f'''(x) = \frac{e^x(1 - e^{2x})}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}.$$

Par la formule du reste de Taylor, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un nombre $z$ entre 0 et $x$ tel que

$$f(x) - p_2(x; 0, f) = \frac{1}{3!}f'''(z)x^3.$$

Considérons séparément les cas $x \geq 0$ et $x < 0$.
Cas 1 : Si $x \geq 0$, alors $z \geq 0$. En considérant l'expression de $f'''$ ci-dessus, on remarque que cela implique que $f'''(z) \leq 0$. De plus, on a que $x^3 \geq 0$. Donc, on trouve que $f(x) - p_2(x; 0, f) \leq 0$ lorsque $x \geq 0$.
Cas 2 : Si $x < 0$, alors $z \leq 0$. En considérant l'expression de $f'''$ ci-dessus, on remarque que cela implique que $f'''(z) \geq 0$. De plus, on a que $x^3 < 0$. Donc, on trouve que $f(x) - p_2(x; 0, f) \leq 0$ lorsque $x < 0$.
On obtient que $f(x) - p_2(x; 0, f) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc l'affirmation est vraie.

**Réponse finale (vrai/faux) :** vrai

**Question 8** [∼**2 points**].

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}$ définie pour tout $x < 1$.

**8a Donnez** une primitive de $f$ (définie pour tout $x < 1$).

On procède par substitution avec $u(x) = x^3$. Cela donne $f(x) = \frac{1}{3}g(u(x))u'(x)$, où $g(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y}}$. On utilise la formule $\int g(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x = G(u(x)) + C$ où $G$ est une primitive de $g$. En choisissant par exemple $G(y) = -2\sqrt{1-y}$ comme primitive de $g$, cela donne finalement $F(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3} + C$ comme primitive de $f$.

**Réponse finale :** $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3} + C$$

**8b Donnez** la valeur de l'intégrale impropre $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ si elle converge ; sinon, **indiquez** qu'elle diverge.

Par définition et par la question précédente, on a que $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to 1} \int_{-1}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to 1} \left[-\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3}\right]_{x=-1}^{x=b} = \lim_{b\to 1} -\frac{2}{3}\sqrt{1-b^3} + \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

**Réponse finale :** $$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

| **PRÉNOM** et **NOM** : | **NOMA** |
|---|---|

**Question 9** [**∼3 points**].

Soit un paramètre $a \neq 0$. Considérez l'équation différentielle $x'(t) = 1 + ax(t)$ avec la condition initiale $x(0) = 0$.

**Donnez** l'expression de la solution $x(t)$ de l'équation différentielle ci-dessus, en fonction du paramètre $a$. **Donnez** également toutes les valeurs du paramètre $a$ pour lesquelles $x(t)$ admet une limite finie lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

En utilisant la formule du cours pour les EDOs linéaires à coefficients constants, on trouve que $x(t)$ a la forme $x(t) = Ce^{at} - \frac{1}{a}$ pour un certain $C \in \mathbb{R}$. On utilise la condition initiale pour trouver la valeur de $C$. Cela donne $x(0) = C - \frac{1}{a} = 0$, d'où l'on déduit $C = \frac{1}{a}$. Donc, la solution est donnée par $x(t) = \frac{1}{a}(Ce^{at} - 1)$.
On regarde maintenant la valeur limite. On a que $\lim_{t\to\infty} x(t) = -\frac{1}{a}$ lorsque $a < 0$, et $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$ lorsque $a > 0$.

**Réponses finales :** $x(t) = \frac{1}{a}(e^{at} - 1)$

Les valeurs du paramètre $a$ pour lesquelles $x(t)$ admet une limite finie lorsque $t$ tend vers $+\infty$ sont :

$$]-\infty, 0[$$