PRÉNOM et **NOM** :	**NOMA**

Consignes.

- Commencez par **écrire vos prénom et nom en MAJUSCULES ainsi que votre NOMA** dans l'espace prévu en haut du recto de chacune des trois feuilles de l'examen.
- Écrivez vos réponses **à l'intérieur des cadres** prévus. Justifiez lorsque c'est demandé.
- Lorsque c'est demandé, **recopiez votre réponse finale dans le cadre séparé** prévu à la fin de la question.
- Écrivez vos réponses proprement au bic bleu ou noir, ou éventuellement au crayon noir bien lisible.
- En cas d'erreur, si vous ne pouvez vraiment pas effacer ou barrer proprement, demandez aux surveillants une nouvelle page d'énoncé. Dans ce cas, vous rendez la page erronée.

Question 1 [$\sim$**2 points**] *(les deux parties **1a** et **1b** de cette question sont totalement indépendantes)*

Soit a un paramètre réel. On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{|x|} + a|x|$.

1a Déterminez toutes les valeurs du paramètre a telles que la fonction f est dérivable en $x = 0$. **Justifiez.**

Par définition, la dérivée de la fonction f en $x = 0$ se calcule via la limite suivante $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$. On calcule $f(0) = e^0 + 0 = 1$ et $f(h) = e^{|h|} + a|h|$, d'où

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{|h|} + a|h| - 1}{h}.$$

A cause de la valeur absolue, on va calculer séparément la limite à gauche $h \to 0^-$ et à la limite à droite $h \to 0^+$:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{e^{|h|} + a|h| - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{e^{-h} + a(-h) - 1}{h} \text{ (car } h < 0 \Rightarrow |h| = -h) \overset{LH\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{-e^{-h} - a}{1} = -1 - a$$

(on avait un cas d'indétermination $\frac{0}{0}$ qu'on a levé avec la règle de L'Hospital). De même on a à droite

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{|h|} + a|h| - 1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{h} + ah - 1}{h} \text{ (car } h > 0 \Rightarrow |h| = h) \overset{LH\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{h} + a}{1} = 1 + a.$$

Enfin, si on veut que la fonction soit dérivable, la limite doit exister, ce qui est le cas si et seulement si les limites à gauche et à droite sont égales. Il faut donc que $-1 - a = 1 + a$, ce qui donne $-2 = 2a$ et finalement $a = -1$, seule valeur du paramètre pour laquelle la fonction est dérivable.

Réponse finale : valeur(s) du paramètre a telle(s) que la fonction est dérivable en $x = 0$: $\boxed{\{-1\}}$

Soit b un paramètre réel. On considère la fonction g définie pour tout réel strictement positif par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2} & \text{pour } x \neq 1, \\ b & \text{pour } x = 1. \end{cases}$$

1b Déterminez toutes les valeurs du paramètre b telles que la fonction g est continue en $x = 1$. **Justifiez.**

Par définition, la fonction g est continue en $x = 1$ si et seulement si on a $\lim_{x\to 1} g(x) = g(1)$. On voit que $g(1) = b$, et il reste à calculer la limite

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2} \overset{LH\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)} \overset{LH\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

(où on a utilisé deux fois la règle de L'Hospital, suite à deux indéterminations de type $\frac{0}{0}$).

Pour que la fonction soit continue la seule possibilité est donc que $b = -\frac{1}{2}$.

Remarque : on pouvait aussi éviter la seconde application de L'Hospital en manipulant l'expression dans la limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1-x}{x}}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{-1}{x}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Réponse finale : valeur(s) du paramètre b telle(s) que la fonction est continue en $x = 1$: $\boxed{\{-1/2\}}$

Question 2 [∼**3 points**].

Soit $n \geq 1$ un paramètre entier. Soit la fonction h définie par $h(x) = e^{-x}x^n$ sur le domaine $D = \{x \text{ tel que } x \geq 0\}$.

2a **Déterminez** les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction h sur son domaine D.

La fonction étant dérivable sur son domaine (puisque c'est le produit d'un polynôme et d'une l'exponentielle), le signe de cette dérivée va nous indiquer les intervalles de croissance et décroissance.

La dérivée de h est

$$h'(x) = (e^{-x})'x^n + e^{-x}(x^n)' = -e^{-x}x^n + e^{-x}nx^{n-1} = -e^{-x}x^{n-1}x + e^{-x}nx^{n-1} = e^{-x}x^{n-1}(-x+n).$$

Lorsque $x \in [0, n]$ cette dérivée est positive ou nulle, puisqu'on a $(-x+n) \geq 0$ et $x^n \geq 0$ (ainsi que $e^{-x} > 0$) ; cela permet d'affirmer que la fonction est croissante sur cet intervalle. De même, lorsque $x \in [n, \infty[$ la dérivée est négative ou null, puisque $(-x+n) \leq 0$ et $x^n \geq 0$, d'où une fonction décroissante sur cet intervalle.

Réponse finale : la fonction croît sur $\boxed{[0, n]}$ et décroît sur $\boxed{[n, \infty[}$

2b La fonction h possède-t-elle une asymptote horizontale ? Si oui **calculez** son équation, sinon **justifiez**.
La fonction ne peut posséder d'asymptote horizontale à gauche, puis le domaine est limité de ce côté ($x \geq 0$). A droite par contre on peut déterminer s'il existe une asymptote horizontale en calculant $\lim_{x\to+\infty} h(x)$: on trouve

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}x^n = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad \text{(car l'exponentielle croît plus rapidement que n'importe quel polynôme),}$$

ce qui démontre l'existence d'une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Réponse finale : équation de l'asymptote horizontale (si elle existe) : $\boxed{y = 0}$

On s'intéresse maintenant à l'équation $\boxed{x^n = e^x}$ à résoudre sur les réels $x \geq 0$.

On constate que si x est une solution de cette équation, alors la fonction h va prendre la valeur 1 en ce point, puisque

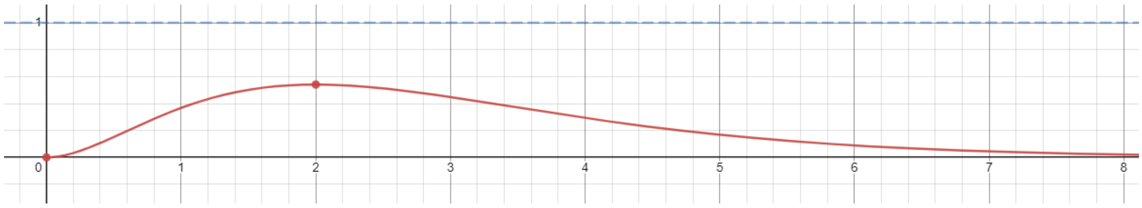
$$x^n = e^x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^n}{e^x} = \frac{e^x}{e^x} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x}x^n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{h(x) = 1}.$$

2c En vous appuyant sur les résultats obtenus aux points **2a** et **2b**, **déterminez** pour quelle(s) valeur(s) du paramètre entier $n \geq 1$ l'équation $x^n = e^x$ ne possède aucune solution. **Justifiez**.

Puisque l'équation $x^n = e^x$ est équivalente à $h(x) = 1$, étudions la fonction h sur son domaine $D = [0, \infty[$.

Au point $x = 0$ elle vaut $h(0) = e^{-0}0^n = 0$, quel que soit le paramètre $n \geq 1$. Ensuite la fonction croît sur l'intervalle $[0, n]$ jusqu'à atteindre un maximum en $x = n$: en ce point elle vaut $h(n) = e^{-n}n^n$. Puis la fonction décroît sur l'intervalle $[n, \infty[$, et finit par tendre vers zéro lorsque $x \to \infty$ (cf. le calcul d'asymptote au **2b**).

L'allure de cette fonction est donc celle du graphe ci-dessous (on a représenté en rouge le cas $n = 2$)



Dès lors il est clair que l'équation $h(x) = 1$ n'admettra aucune solution que lorsque le maximum atteint en $x = n$ possède une ordonnée strictement inférieure à 1. Cela se traduit par la condition $h(n) < 1 \Leftrightarrow e^{-n}n^n < 1$, qu'on peut encore simplifier en $n^n < e^n$ ou $n < e$. Puisque $e \approx 2.7$, on peut conclure que l'équation ne possède aucune solution que dans les cas où $n = 1$ ou $n = 2$ (*remarque* : ce raisonnement montre aussi qu'il existe exactement deux solutions dès que $n > e$, donc pour tout $n \geq 3$, par le théorème des valeurs intermédiaires).

Réponse finale : l'équation ne possède aucune solution pour ces valeurs de n : $\boxed{\{1, 2\}}$

PRÉNOM et **NOM** :	**NOMA**

Question 3 [$\sim$**3 points**].

Soit la fonction $f(x) = e^{1-e^x}$. Donnez la dérivée première (f') et la dérivée seconde (f'') de f.

3a

$$f'(x) = -e^x e^{1-e^x} = -e^{1+x-e^x},$$
$$f''(x) = -(1-e^x)e^{1+x-e^x}.$$

Réponse finale : $f'(x) = -e^{1+x-e^x}$

$f''(x) = -(1-e^x)e^{1+x-e^x}$

Donnez le polynôme de Taylor d'ordre deux de la fonction f au voisinage du point $a = 0$.

3b

$$\begin{aligned} p_2(x; f, 0) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 \\ &= 1 + (-1)x + \frac{1}{2}0x^2. \end{aligned}$$

Réponse finale : $p_2(x; f, 0) = 1 - x$

En supposant que la dérivée troisième de f est bornée par 2 en valeur absolue (c'est-à-dire, $|f'''(x)| \leq 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), bornez la valeur absolue de la différence entre $f(x)$ et $p_2(x; f, 0)$ avec une formule ne faisant apparaître que la variable x comme inconnue.

3c Raisonnement justifié :

$$\begin{aligned} |f(x) - p_2(x; f, 0)| &= \left|\frac{1}{6}f'''(c)x^3\right| \quad \text{pour un certain } c \text{ entre } 0 \text{ et } x, \\ &\leq \frac{1}{6}2|x|^3, \\ &= \frac{1}{3}|x|^3. \end{aligned}$$

Réponse finale : $|f(x) - p_2(x; f, 0)| \leq \frac{1}{3}|x|^3$

Question 4 [$\sim$**2 points**].

Soit la fonction $f(x,y) = e^{xy+x+ay}$, où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Trouvez tous les points critiques (aussi appelés points stationnaires) de f en fonction de a.

Raisonnement justifié :

Les dérivées partielles de f sont

$$f'_1(x,y) = e^{xy+x+ay}(y+1),$$
$$f'_2(x,y) = e^{xy+x+ay}(x+a).$$

Par définition, (x,y) est un point critique si et seulement si (x,y) est dans le domaine de f et $f'_1(x,y) = f'_2(x,y) = 0$. Par conséquent, le seul point critique est $(x,y) = (-a,-1)$.

Réponse finale : le(s) point(s) critique(s) de f sont

$$(-a, -1)$$

Question 5 [$\sim$**3 points**].

Soit la fonction $f(x) = 2xe^{-x^2}$. Donnez une primitive de f.

5a Raisonnement justifié :

Par substitution, en posant $y = x^2$, on trouve $\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$. On peut alors écrire

$$\int 2xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int e^{-y}\,\mathrm{d}y = -e^{-y} + C = -e^{-x^2} + C$$

Réponse finale : $F(x) = -e^{-x^2} \qquad + C$

PRÉNOM et **NOM** :	**NOMA**

(suite de la Question 5)

Soit la fonction $g(x) = 2x^3e^{-x^2}$. Donnez une primitive de g.
Indice : procédez par parties, en utilisant la primitive trouvée à l'exercice **5a** précédent.

5b Raisonnement justifié :

Par parties, en posant $f(x) = 2xe^{-x^2}$ et $h(x) = x^2$, on a que $g(x) = f(x)h(x)$ et on peut donc écrire

$$\begin{aligned}\int x^3e^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= F(x)h(x) - \int F(x)h'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (x^2)(-e^{-x^2}) - \int(-e^{-x^2})(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= -x^2e^{-x^2} + \int 2xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C\end{aligned}$$

Réponse finale : $G(x) = -(x^2+1)e^{-x^2} + C$

Donnez la valeur de l'intégrale impropre $I = \int_0^\infty 2x^3e^{-x^2}$ si elle converge, sinon indiquez qu'elle diverge.

5c Raisonnement justifié :

$$I = \lim_{b\to\infty}\int_0^b x^3e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-(x^2+1)e^{-x^2}\right]_{x=0}^{x=b} = \left(\lim_{b\to\infty} -(b^2+1)e^{-b^2}\right) - (-1) = 1.$$

Réponse finale : $I = 1$

Question 6 [$\sim$**2 points**].

Donnez l'expression de la solution $x(t)$ de l'équation différentielle $x'(t) = 2te^{-x(t)}$ avec la condition initiale $x(0) = a$, où $a \in \mathbb{R}$.

Raisonnement justifié :

Tout d'abord, on a que $x'(t)e^{x(t)} = 2t$. Cela donne

$$\int_0^t x'(s)e^{x(s)}\,\mathrm{d}s = \int_0^t 2s\,\mathrm{d}s = t^2$$

On posant $y = x(s)$, on a que $\mathrm{d}y = x'(s)\mathrm{d}s$. Donc,

$$\int_0^t x'(s)e^{x(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{x(0)}^{x(t)} e^y\,\mathrm{d}y = [e^y]_{y=x(0)}^{y=x(t)} = e^{x(t)} - e^a.$$

Cela donne

$$e^{x(t)} - e^a = t^2.$$

Par conséquent,

$$x(t) = \ln\left(t^2 + e^a\right).$$

Réponse finale : la solution est $x(t) = \ln\left(t^2 + e^a\right)$