PRÉNOM et **NOM** :	**NOMA**

Consignes.

- Commencez par **écrire vos prénom et nom en MAJUSCULES ainsi que votre NOMA** dans l'espace prévu en haut du recto de chacune des deux feuilles de l'examen.
- Écrivez vos réponses **à l'intérieur des cadres** prévus. Justifiez lorsque c'est demandé.
- Lorsque c'est demandé, **recopiez votre réponse finale dans le cadre séparé** prévu à la fin de la question.
- Écrivez vos réponses proprement au bic bleu ou noir, ou éventuellement au crayon noir bien lisible.
- En cas d'erreur, si vous ne pouvez vraiment pas effacer ou barrer proprement, demandez aux surveillants une nouvelle page d'énoncé. Dans ce cas, vous rendez la page erronée.

Question 1 – Preuve par récurrence [∼2.5 points].

Soit n un entier supérieur ou égal à un. On souhaite démontrer par récurrence l'identité suivante

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{i}\right) = \ln(n+1). \tag{1}$$

1a Démontrez le cas de base.

Quand $n = 1$, l'égalité à démontrer devient

$$\sum_{i=1}^{1} \ln\left(1+\frac{1}{1}\right) \stackrel{?}{=} \ln(1+1),$$

qui se simplifie en $\ln(2) = \ln(2)$, qui est bien vérifié.

1b Écrivez l'égalité qu'il faut à présent prouver dans cette preuve par récurrence.

Pour prouver l'identité (1) par récurrence, on suppose qu'elle est connue pour le cas n et on cherche à la démontrer pour le cas $n+1$, c'est-à-dire à prouver que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{i}\right) = \ln(n+2).$$

1c Démontrez l'égalité du point précédent pour terminer la preuve par récurrence de l'identité (1).

Nous devons donc démontrer que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{i}\right) = \ln(n+2).$$

La somme du membre de gauche comporte $n+1$ termes, et peut être décomposée comme la somme des n premiers termes (qui vaut $\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{1}{i})$) auquel au additionne un dernier terme correspondant à $i = n+1$ (qui s'écrit $\ln(1+\frac{1}{n+1})$. Or, par l'hypothèse de récurrence, on sait que la somme de ces n premiers termes vaut $\ln(n+1)$. L'égalité à prouver peut donc aussi s'écrire

$$\ln(n+1) + \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \stackrel{?}{=} \ln(n+2).$$

Simplifions cette égalité : on utilise l'identité $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$ dans le membre de gauche pour trouver

$$\ln(n+1) + \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \ln\left((n+1)(1+\frac{1}{n+1})\right) = \ln\left(n+1+\frac{n+1}{n+1}\right) = \ln(n+1+1) = \ln(2)$$

qui est bien bien le membre de droite attendu, et termine ainsi la preuve.

Puisqu'on a vérifié le cas de base $n = 1$ au point **1a**, l'identité est ainsi prouvée par récurrence pour tout $n \geq 1$.

Question 2 – Équation exponentielle [∼2 points].

Trouvez toutes les solutions de l'équation suivante, où l'inconnue x est un nombre réel. Simplifiez votre réponse au maximum.

$$2^{-6x} + \left(\frac{1}{8}\right)^x = 20.$$

Examinons le membre de gauche : comme le premier terme est une puissance de deux, tentons de convertir le second terme sous cette forme. Puisque $8 = 2^3$ on a $\frac{1}{8} = 2^{-3}$ et $(\frac{1}{8})^x = 2^{-3x}$. On remarque alors que le premier terme est exactement le carré du second, puisque $(2^{-3x})^2 = 2^{-3x\cdot 2} = 2^{-6x}$.

Cela nous conduit à poser $2^{-3x} = t$: l'équation devient alors $t^2 + t = 20$, une équation du second degré qu'on résout de façon classique. Après calcul du discriminant ($\Delta = 81$) on trouve les deux solutions $\frac{-1\pm 9}{2}$, c'est-à-dire $t = -5$ et $t = 4$.

Comme une puissance telle que 2^{-3x} est toujours positive, on rejette la solution $t = -5$, il reste uniquement $t = 4$.

Il reste à en extraire la valeur de x : comme $2^{-3x} = 4$, on prend le logarithme en base deux des deux côtés, ce qui donne $-3x = 2$, d'où au final l'unique solution $x = -2/3$.

Réponse finale : l'ensemble des solutions de l'équation est $\boxed{\{\ -2/3\ \}}$

Question 3 – Réciproque d'une fonction [∼2 points].

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^3-1}.$$

Calculez la fonction g réciproque de f.

Selon la technique vue au cours, on écrit $y = \frac{x^3+1}{x^3-1}$ et on essaie d'exprimer x en fonction de y. En multipliant par le dénominateur des deux côtés on obtient

$$y(x^3-1) = x^3+1 \Leftrightarrow x^3y - x^3 = y+1 \Leftrightarrow x^3(y-1) = y+1 \Leftrightarrow x^3 = \frac{y+1}{y-1} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y+1}{y-1}}.$$

On a donc $g(y) = \sqrt[3]{\frac{y+1}{y-1}}$ ou, avec la variable x comme demandé, $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

Réponse finale : la réciproque g est définie par $\boxed{g(x) = \{\ \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\ \}}$

PRÉNOM et **NOM** :	**NOMA**

Question 4 – Fabrication de céramique [∼**3.5 points**].

Une société fabrique un certain type de céramique à hautes performances. La cuisson de cette céramique se fait durant un nombre d'heures H, qui doit être compris entre $H = 0$ et $H = 3$ (notez que H prend des valeurs réelles, pas forcément entières). La résistance R de la céramique dépend de la durée de cuisson H selon la formule

$$R(H) = 2H^3 - 9H^2 + 12H.$$

On cherche la durée de cuisson H qui va *maximiser la résistance* $R(H)$ de la céramique.

4a Démontrez sans effectuer aucun calcul que ce problème admet nécessairement un maximum global.

La fonction $R(H)$ est continue (puisque c'est un polynôme), et on cherche à la maximiser sur l'intervalle $[0, 3]$, qui est borné et fermé. Par conséquent le théorème des bornes atteintes garantit l'existence d'un maximum global.

4b Vrai ou faux : avant d'effectuer les calculs, on peut être sûr que la dérivée de la fonction exprimant le coût unitaire en fonction de la quantité produite s'annule en ce maximum global. **Justifiez** votre réponse.

Faux : on ne peut pas en être sûr. En effet, on a vu au cours que le maximum peut se trouver à une extrémité de l'intervalle ($H = 0$ ou $H = 3$) et que dans ce cas il n'est pas nécessaire que la dérivée de f soit nulle.

4c Calculez la solution optimale du problème. **Justifiez** soigneusement.

En vertu de ce qui précède, on sait que le maximum de la fonction f se trouve soit en un point stationnaire (où la dérivée est nulle), soit à une extrémité de l'intervalle $[0, 3]$.

Calculons la dérivée de R : on trouve $R'(H) = 6H^2 - 18H + 12$. Les points stationnaires s'obtiennent en résolvant $R'(H) = 0$, ce qui peut se faire à l'aide de la formule classique. En simplifiant d'abord par le facteur commun 6, on obtient $H^2 - 3H + 2 = 0$ pour lequel on a $\Delta = 1$ puis $H = \frac{3 \pm 1}{2}$, fournissant ainsi les deux solutions $H = 1$ et $H = 2$.

A ce stade, le maximum peut se trouver soit en $H = 1$, $H = 2$ (points stationnaires) ou $H = 0$, $H = 3$ (extrémités). Calculons les valeurs correspondantes : $R(0) = 0$, $R(1) = 5$, $R(2) = 4$ et $R(3) = 9$. Le maximum global correspond donc à la durée $H = 3$.

Remarque : on pouvait aussi étudier la croissance/décroissance de $R(H)$ et en déduire que le maximum global est soit en $H = 1$, soit en $H = 3$ (croissance sur $[0, 1]$ puis décroissance sur $[1, 2]$ puis croissance sur $[2, 3]$), mais cela n'évite pas la comparaison entre les valeurs $R(1)$ et $R(3)$.

Réponse finale : la résistance est maximale pour la durée $\boxed{H = 3}$

Question 5 [$\sim$**2 points**].

Soit la fonction de deux variables $f(x,y) = \dfrac{1}{y^2e^x + y^2 + x^2 + 1}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

5a Donnez les dérivées partielles de f par rapport à x et à y.

Dérivée partielle par rapport à x : $f_1'(x,y) = \frac{-y^2e^x - 2x}{(y^2e^x+y^2+x^2+1)^2}$.
Dérivée partielle par rapport à y : $f_2'(x,y) = \frac{-2ye^x - 2y}{(y^2e^x+y^2+x^2+1)^2}$.

Réponse finale :

- ◇ Dérivée partielle par rapport à x : $$f_1'(x,y) = \frac{-y^2e^x - 2x}{(y^2e^x+y^2+x^2+1)^2}.$$
- ◇ Dérivée partielle par rapport à y : $$f_2'(x,y) = \frac{-2ye^x - 2y}{(y^2e^x+y^2+x^2+1)^2}.$$

5b Donnez tous les points critiques de f. **Justifiez** votre réponse. *Conseil* : notez que $e^x + 1$ ne s'annule jamais.

Les points critiques de f sont les points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $f_1'(x,y) = f_2'(x,y) = 0$. En observant f_2', on remarque que cela requiert que $-2y(e^x+1) = 0$, d'où l'on déduit que $y = 0$ puisque $e^x + 1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En injectant cela dans l'expression de f_1', on trouve alors que $-2x = 0$, c'est-à-dire $x = 0$. En conclusion, f a un seul point critique en $(0,0)$.

Réponse finale : les points critiques de f sont (à donner sous la forme de couples (x,y)) :

$$\{(0,0)\}$$

PRÉNOM et **NOM** :	**NOMA**

Question 6 [∼**2 points**].

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ définie pour tout $x > 0$.

6a Donnez une primitive de f (définie pour tout $x > 0$).

On procède par parties avec $g'(x) = \frac{1}{x^2}$ et $h(x) = \ln(x)$ et la formule $\int g'(x)h(x)\,\mathrm{d}x = g(x)h(x) - \int g(x)h'(x)\,\mathrm{d}x$. On utilise $g(x) = -\frac{1}{x}$ qui satsifiait bien $g'(x) = \frac{1}{x^2}$. On a aussi que $h'(x) = \frac{1}{x}$. Cela donne

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{x}\ln(x) - \int -\frac{1}{x}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{x}\ln(x) + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{x}\ln(x) - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}(\ln(x)+1).\end{aligned}$$

Réponse finale : $\displaystyle \int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln(x)+1}{x} + C$

6b Donnez la valeur de l'intégrale impropre $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ si elle converge ; sinon, **indiquez** qu'elle diverge.

Par définition et par la question précédente, on a que $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{\ln(x)+1}{x}\right]_{x=1}^{x=b} = \lim_{b\to\infty} -\frac{\ln(b)+1}{b} + \frac{\ln(1)+1}{1} = \lim_{b\to\infty} -\frac{\ln(b)+1}{b} + 1 = 0 + 1 = 1.$

Réponse finale : $\displaystyle \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

Question 6 [$\sim$**3 points**].

Soit la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ définie pour tout $x > -1$.

7a Calculez l'expression de $p_1(x; 0, f)$, c'est-à-dire le polynôme de Taylor d'ordre 1 de f en 0.

En utilisant la définition, on trouve que

$$p_1(x; 0, f) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)(x-0) = 0 + \frac{1}{1+0}(x-0) = x$$

Réponse finale : $p_1(x; 0, f) =$ x

7b En invoquant la formule de Taylor, et en particulier son reste, **déterminez** s'il est vrai ou faux que l'inégalité $f(x) - p_1(x; 0, f) \leq 0$ est satisfaite pour tout $x > -1$. **Justifiez.**

Par la formule du reste de Taylor, on sait que pour tout $x > -1$, il existe un nombre z entre 0 et x tel que

$$\begin{aligned} f(x) - p_1(x; 0, f) &= \frac{1}{2!} f''(z)(x-0)^2 \\ &= \frac{1}{2!} \frac{-1}{(1+z)^2} x^2 \\ &= \frac{-1}{2(1+z)^2} x^2. \end{aligned}$$

On obtient que $f(x) - p_1(x; 0, f) \leq 0$ pour tout $x > -1$.
Donc l'affirmation "$f(x) - p_1(x; 0, f) \leq 0$ pour tout $x > -1$" est vraie

Réponse finale (vrai/faux) : vrai

PRÉNOM et **NOM** :	**NOMA**

7c On s'intéresse maintenant à approximer la valeur de $\ln(1.1)$. En invoquant la formule de Taylor, et en particulier son reste, **donnez** une borne inférieure sur la valeur de $\ln(1.1)$ mais à une distance de au plus $1/200$ $(= 0.005)$ de celle-ci, c'est-à-dire, une valeur $a \in \mathbb{R}$ telle que $a \leq \ln(1.1)$ et $\ln(1.1) - a \leq 0.005$. **Justifiez**.

Notons tout d'abord que $\ln(1.1) = f(0.1)$. Par la formule du reste de Taylor, on sait qu'il existe un nombre $z \in]0, 0.1[$ tel que $f(0.1) - p_1(0.1; 0, f) = \frac{-1}{2(1+z)^2}(0.1)^2$. On obtient donc les bornes suivantes sur $f(0.1) - p_1(0.1; 0, f)$:

$$\inf_{z\in]0,0.1[} \frac{-1}{2(1+z)^2}(0.1)^2 \leq f(0.1) - p_1(0.1; 0, f) \leq \sup_{z\in]0,0.1[} \frac{-1}{2(1+z)^2}(0.1)^2 \leq 0.$$

Puisque $\inf_{z\in]0,0.1[} \frac{-1}{2(1+z)^2}(0.1)^2 = \frac{-1}{2(1+0)^2}(0.1)^2 = -0.005$, cela donne

$$p_1(0.1; 0, f) - 0.005 \leq f(0.1) \leq p_1(0.1; 0, f).$$

On trouve donc la valeur $a = p_1(0.1; 0, f) - 0.005 = 0.095$. (Pour information : $\ln(1.1) \approx 0.0953101798$.)

Réponse finale : $a = 0.095$

Question 8 [∼**3 points**].

Soit un paramètre $b > 1$. Considérez l'équation différentielle $x'(t) + x(t) = bx(t)^2$ avec la condition initiale $x(0) = 1$.

Donnez l'expression de la solution $x(t)$ de l'équation différentielle ci-dessus, en fonction du paramètre b. **Donnez** également son domaine de définition, c'est-à-dire, le plus grand intervalle de valeurs de t pour lesquels $x(t)$ est bien définie.

En utilisant la formule du cours pour les EDOs de degré deux, on trouve que $x(t)$ a la forme $x(t) = \frac{1}{b-Ae^t}$ pour un certain $A \in \mathbb{R}$. On utilise la condition initiale pour trouver la valeur de A. Cela donne $x(0) = \frac{1}{b-A} = 1$, d'où l'on déduit $A = b - 1$. Donc, la solution est donnée par $x(t) = \frac{1}{b-(b-1)e^t}$. Son domaine de définition est le plus grand intervalle de valeurs de t contenant 0 et pour lesquelles $b-(b-1)e^t \neq 0$. Cela donne l'intervalle $]-\infty, \ln(b)-\ln(b-1)[$.

Réponse finale : $x(t) = \dfrac{1}{b-(b-1)e^t}$

définie pour tout t dans l'intervalle $\left] -\infty, \ln\left(\dfrac{b}{b-1}\right) \right[$